Estimación bayesiana del Valor en Riesgo. Una aplicación para el mercado de valores colombiano

Charle A. Londoño[1,2] Juan Carlos Correa[1] Mauricio Lopera[2]

[1]Universidad Nacional de Colombia
Escuela de Estadística
[2]Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Económicas

III Congreso de Economía Colombiana
Universidad de los Andes
Bogotá, Septiembre 27 y 28 de 2012

Septiembre 27 de 2012

Contenido

1. Motivación [1/4]

- El crecimiento de los mercados financieros a nivel mundial ha mostrado la necesidad que se tiene de una mejor comprensión, conocimiento y supervisión de los riesgos a los que están expuestos las instituciones financieras.

- Después de la crisis financiera de 2008, se evidenció los problemas internos de algunas instituciones financieras en la administración del riesgo.

- El *Basel Committe on Banking Supervition* (BCBS) ha estado en un proceso de mejoramiento de la regulación actual por medio de la introducción de Basilea II y III.

1. Motivación [2/4]

- La Superintendencia Financiera de Colombia (SFC) en la Circular Externa 057 de 2007[1] propone un sistema de administración de riesgo de mercado (SARM) que permita identificar, medir, controlar y monitorear las posiciones en valores utilizando la medida de Valor en Riesgo (VaR).

- Para el propósito de su implementación se exige que satisfagan ciertos requerimientos, tales como:

    1. El uso como mínimo de un índice de mercado (β de mercado).
    2. Medidas de desempeño (*backtesting*) que sólo tienen en cuenta el nivel de fallas pre-especificadas por el modelo.
    3. El uso de metodologías básicas para evaluar el riesgo.

[1] Superintendencia Financiera de Colombia (2007). Circular Externa 051 de 2007. *Superintendencia Financiera de Colombia*.

1. Motivación [3/4]

En este orden de ideas, esta investigación busca responder la siguiente pregunta:

¿Qué cambios y adiciones serían importantes para la mejor cobertura del riesgo en lo referente a los factores de riesgo, medidas de desempeño y metodologías?

1. Motivación [4/4]

Para responder esta pregunta se proponen:

- Otros factores de riesgo, como son los de Fama y French (1992)[2].
- Medidas de desempeño que tengan en cuenta además la posible dependencia de los errores.
- Una metodología, como la regresión del cuantil bayesiana.

[2] Fama, E., French, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, Vol. 47, No. 2, pp. 427-465.

2.1. Valor en riesgo: una revisión metodológica [1/2]

Ahora, si $\{r_t\}_{t=1}^{T}$ denota el retorno de un portafolio de activos en el período t, entonces el VaR es

$$VaR_t^h(\alpha) = \text{ínf}\left\{l \in \mathrm{R}^+ \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad F_{r_t}(l) \geq \alpha\right\} \tag{2.1}$$

donde $F_{r_t}(l)$ es la función de distribución acumulada (*f.d.a*), $\alpha \in (0, 1)$ es su nivel de significancia y h es el período de tenencia máxima de un portafolio riesgoso que se encuentra entre $[t, t+h)$ (Diagne, 2002)[3].

[3] Diagne, M. (2002). Final risk management and portfolio optimization using artificial neural networks and extreme value theory. Tesis para optar al grado de PhD, Keiserslautern, University Keiserslautern-Mathematics Departament/ Financial Mathematics, 141p.

2.1. Valor en riesgo: una revisión metodológica [2/2]

De la ecuación

$$VaR_t^h(\alpha) = \text{ínf}\left\{l \in \mathrm{R}^+ \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad F_{r_t}(l) \geq \alpha\right\} \tag{2.2}$$

se puede observar que esta medida es una herramienta intuitiva para modelar el riesgo, sin embargo su implementación es un desafío estadístico cambiante al diferir en sus supuestos (Engle y Manganelli, 2004)[4].

[4] Engle, R. F., Manganelli, S. (2004). CAViaR: Conditional autoregressive Value at Risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 22, No. 4, pp. 367-381.

2.2. Requerimientos regulatorios de las sensibilidades de los portafolios [1/4]

Para introducir el factor de riesgo en el modelo, como es el β de mercado, la regulación colombiana sugiere una técnica de mapeo de las sensibilidades factoriales que funciona de la siguiente manera: si se tiene el modelo de RiskMetrics, y se define el *Equity* VaR como la multiplicación de la cantidad de dinero invertido ajustado por la sensibilidad (factor de riesgo) por el VaR, este es establecido por

$$Equity \quad VaR_t^h(\alpha) = EN_{t+h} \times (Z_\alpha \times \hat{\sigma}_{t+h}) \tag{2.3}$$

donde EN_{t+h} es el valor absoluto de la exposición neta de posiciones atadas al factor de riesgo[5].

[5] Superintendencia Financiera de Colombia (2007). Circular Externa 051 de 2007. *Superintendencia Financiera de Colombia.*

3.1. Regresión cuantil bayesiana [1/2]

Para estimar los valores de los parámetros de la ecuación (2.1) bajo la estructura bayesiana es necesario establecer una distribución a *posteriori* que es la multiplicación de la distribución a *priori* de β, $\pi(\beta)$, por la función de verosimilitud:

$$\pi(\beta\,|r) \propto L(r\,|\beta,\sigma)\,\pi(\beta) \tag{3.1}$$

siendo

$$L(r\,|\beta,\,\sigma) = \frac{\alpha^n(1-\alpha^n)}{\sigma}\exp\left\{\frac{1}{\sigma} - \sum_t \rho_\alpha\left(r_t - q_{\alpha,t}(x_t;\beta)\right)\right\} \tag{3.2}$$

donde, estos parámetros son estimados vía el método Markov Chain Monte Carlo (MCMC) (Yu y Moyeed, 2001)[6].

[6] Yu, K., Moyeed, R. A. (2001). Baysesian quatile regression. *Statistics* & *Probability Letters*, Vol. 54, No. 4, pp. 437-447.

3.1. Regresión cuantil bayesiana [2/2]

Teorema 1. Suponga que la distribución a *priori* para β es impropia y uniforme, es decir, $\pi(\beta) \propto 1$, entonces todos los momentos de la distribución a *posteriori* existen (Yu y Moyeed, 2001)[7].

[7] Yu, K., Moyeed, R. A. (2001). Baysesian quatile regression. *Statistics* & *Probability Letters*, Vol. 54, No. 4, pp. 437-447.

4. Pruebas de desempeño del modelo

- La selección del modelo interno para administrar el riesgo de mercado por parte de una institución financiera tiene implicaciones de carácter económico, de reputación y de confianza.
- Melo y Granados (2011)[8] muestran cómo es necesario seleccionar modelos que no solo se adapten a la captura de un nivel de probabilidad pre-especificado como lo propone la SFC en el parágrafo 5.2.2.2 de la Circular Externa 057 de 2007.
- En la literatura hay varias medidas de evaluación, como son pruebas de cobertura incondicional, de independencia, condicionales y basadas en funciones de pérdida.

[8] Melo, L. F., Granados, J. C. (2011). Regulación y valor en riesgo. *Revista Ensayos sobre Política Económica*, Vol. 29, No. 64, pp. 110-177.

4.1. Proporción de fallas de Hit

Esta prueba evalúa si se satisface la condición $\Pr\left[r_t < q_{\alpha,t}\right] = \alpha \quad \forall t$ a través del siguiente estadístico

$$\%Hit_t\left(\alpha\right) = \left(T^{-1}\sum_{t=1}^{T} I\left(r_t - q_{\alpha,t}\left(x_t;\beta\right)\right)\right) \times 100 = \left(T^{-1}\sum_{t=1}^{T} I_t\right) \times 100 \tag{4.1}$$

siendo I_t una función indicadora que toma los siguientes valores

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad r_t < q_{\alpha,t}\left(x_t;\beta\right) \\ 0 & \text{en} \quad \text{cualquier} \quad \text{otro} \quad \text{caso} \end{cases} \tag{4.2}$$

4.2. Proporción de fallas de Kupiec

Esta prueba establece la significancia o no de la captura del nivel α-ésimo valorando la hipótesis nula de que $H_0 : p = \alpha$. Su estadístico es

$$LRT_{UC} = -2\ln\left(\frac{L(p; I_1, \ldots, I_T)}{L(\hat{\pi}; I_1, \ldots, I_T)}\right) = -2\ln\left(\frac{p^{n_0}(1-p)^{n_1}}{\hat{\pi}^{n_0}(1-\hat{\pi})^{n_1}}\right) \sim \chi^2_{(1)} \quad (4.3)$$

donde $n_1 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} I_t$, $n_0 = 1 - T^{-1}\sum_{t=1}^{T} I_t$ y $\hat{\pi} = n_1/(n_0 + n_1)$ (Cristoffersen, 1998)[9].

[9] Cristoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 841-862.

4.3. Cuantil Dinámico

Este estadístico busca no sólo la captura del nivel de probabilidad pre-especificado como lo hacen los anteriores estadísticos, sino también evaluar si $\{I_t\}_{t=1}^{T}$ es *i.i.d* utilizando la siguiente regresión artificial

$$Hit_t(\alpha) = \hat{\delta}_0 + \sum_{i=1}^{r} \hat{\delta}_i Hit_{t-i}(\alpha) + \hat{\delta}_{r+1} \hat{q}_{\alpha,t}(x_t;\beta) + \xi_t = X\hat{\delta} + \xi_t \qquad (4.4)$$

siendo $X = [1, Hit_{t-1}(\alpha), \ldots, Hit_{t-r}(\alpha); \hat{q}_{\alpha,t}(x_t;\beta)]'$ y $\hat{\delta} = \left[\hat{\delta}_0, \ldots, \hat{\delta}_{r+1}\right]'$. Entonces, el estadístico de prueba

$$DQ = \frac{\hat{\delta}' X' X \hat{\delta}}{\alpha(1-\alpha)} \sim \chi^2_{(k)} \qquad (4.5)$$

donde $k = rango(X) - 1$ (Engle y Manganelli, 2004)[10].

[10] Engle, R. F., Manganelli, S. (2004). CAViaR: Conditional autoregressive Value at Risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 22, No. 4, pp. 367-381.

4.4. Prueba basada en el análisis de regresión

Clements y Taylor (2003)[11] muestran que por medio de la prueba de Engle y Manganelli (1999) se está obviando dos características importantes que presenta la función indicadora: una es sobre su verdadera naturaleza, y la otra es sobre los clusters de volatilidad. Por lo que propone una especificación basada en regresión logística

$$I_t = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{w} \lambda_i I_{t-i} + \sum_{i=1}^{w-1} \varphi_i D_{i,t} + \zeta_t, \quad t = w+1, w+2, \ldots, T \tag{4.6}$$

A través de la estimación del modelo precedente se evalúa la hipótesis $H_0 : \Phi = 0$ con restricción que $\lambda_0 = \alpha$, con $\Phi = [\lambda_1, \ldots, \lambda_w; \varphi_1, \ldots, \varphi_w]'$ usando un estadístico LRT

$$LRT = -2 \left\{ \ln L\left(\Phi = 0\right) - \ln L\left(\Phi \neq 0\right) \right\} \sim \chi^2_{2w-1} \tag{4.7}$$

[11] Clements, M. P., Taylor, N. (2003). Evaluating interval forecasts of high- frequency financial data. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, No. 4, pp. 445-456.

4.5. Valor en Riesgo basado en Regresión del cuantil

Gaglianone, Lima, Linton y Smith (2011)[12] advierten que las pruebas que son construidas en función de una variable binaria son poco potentes en muestras finitas, a razón de que se contabilizan pocos eventos extremos. La prueba se basa en la siguiente regresión del cuantil

$$q^{*}_{\alpha,t}\left(v_t;\theta\left(\alpha\right)\right)=\theta_0\left(\alpha\right)+\theta_1\left(\alpha\right)q_{\alpha,t}\left(x_t;\beta\right) \tag{4.8}$$

siendo $v_t = \left[1, q_{\alpha,t}\left(x_t;\beta\right)\right]'$ la matriz de variables explicativas que incluye el VaR por la técnica a evaluar y $\theta\left(\alpha\right) = \left[\theta_0\left(\alpha\right), \theta_1\left(\alpha\right)\right]'$ son los parámetros a estimar en el α-ésimo cuantil. El propósito es evaluar $\Pr\left[r_t < q_{\alpha,t}\left(x_t;\beta\right)\right] = \alpha$, su hipótesis nula global es

$$H_0:\begin{cases}\theta_0\left(\alpha\right)=0\\ \theta_1\left(\alpha\right)=-1\end{cases} \tag{4.9}$$

y, su estadístico de prueba es definido por

$$\zeta VQR = T\left[\hat{\Theta}\left(\alpha\right)'\left(\alpha\left(1-\alpha\right)H_\alpha^{-1}JH_\alpha^{-1}\right)^{-1}\hat{\Theta}\left(\alpha\right)\right]\sim\chi^2_{(2)} \tag{4.10}$$

[12] Gaglianone, W. P., Lima, L. R., Linton, O., Smith, D. R. (2011). Evaluating value-at-risk models via quantile regression. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 29, No. 1, pp. 150-160.

4.6. Función de pérdida asimétrica

Una prueba que puede servir para este propósito es la función de pérdida Linex, definida como

$$L\left\{r_t, q_{\alpha,t}\right\} = \exp\left\{c\left(q_{\alpha,t} - r_t\right)\right\} - c\left(q_{\alpha,t} - r_t\right) - 1 \qquad (4.11)$$

con c denotando una constante fija conocida. Esta función tiene las siguientes propiedades:

- Es igual a cero cuando $q_{\alpha,t} = r_t$ y positiva en otro caso.
- Es una función convexa para $\left(q_{\alpha,t} - r_t\right) \in (-\infty, \infty)$
- La mayor penalización se define según sea el valor de c.

5.1. Datos, construcción de indicadores y portafolio [1/2]

Variable	Símbolo	Fuente	Definición
		Aplicación modelo Fama y French	
Índice de mercado completo	EMR_t	SFC	Promedio ponderado de los portafolios construidos para los factores de Fama y French.
Más pequeño menos el más grande ME	SMB_t	SFC	Explicación de su construcción abajo.
Más alto menos el más bajo BE/ME	HML_t	SFC	Explicación de su construcción abajo.
		Aplicación modelo APT y CAPM	
Beta de mercado	$IGBC_t$	SFC	Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia que agrupa las acciones más liquidas que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia.
Letras del tesoro de los EE. UU	$T6_t$	Grupo Aval	Tasa de interés de los bonos de EE.UU a seis meses.
Tasa representativa del mercado	TRM_t	SFC	Promedio aritmético simple de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y venta de divisas efectuadas por instituciones financieras en Colombia.
Tasa de interés interbancaria de Colombia	TIB_t	Grupo Aval	Tasa de interés efectiva anual de préstamo entre los bancos colombianos en el corto plazo.
Unidad de Valor Real	UVR_t	Grupo Aval	Inflación acumulada de los últimos tres meses utilizada para efectuar operaciones de crédito hipotecario en el largo plazo.
Emergent Market Bond Index	$EMBI_t$	Grupo Aval	Índice elaborado por J.P Morgan que define la tasa de interés que pagan los países en vías de desarrollo por sus bonos.

Tabla: Variables explicativas utilizadas para el contraste empírico. Fuente: Londoño y Cuan (2011)[14].

5.1. Datos, construcción de indicadores y portafolio [2/2]

- Para la construcción de estas variables se emplearon 62 acciones de empresas que transan en el mercado accionario colombiano.
- Éstas están compuestas de empresas financieras y no financieras.
- Estos datos cubren el período entre el 3 de enero de 2007 y el 28 de marzo de 2012.

5.2. Resultados de medidas de desempeño de modelos [1/3]

	Vector x_{Vt} para cada esquema
Modelo	BH
APARCH	$x'_{1t} = \left[1, a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3}, a_{t-4}\right]$
GARCH Indirecto	$x'_{2t} = \left[1, q^2_{\alpha,t}, (BH)^2_{t-1}\right]$
Fama y French	$x'_{3t} = \left[1, EMR_{t-1}, EMR_{t-3}, SMB_{t-2}, HML_{t-2}\right]$
APT	$x'_{4t} = \left[1, IGBC_{t-(1,2,4)}, T6_{t-(1,2)}, TRM_{t-(1,4)}, UVR_{t-(4,5,6)}, EMBI_{t-(1,2)}\right]$
CAPM	$x'_{5t} = \left[1, IGBC_{t-1}, IGBC_{t-2}, IGBC_{t-4}\right]$

Tabla: Formas que toma el vector x_{Vt} según su esquema. Fuente: Cálculos propios

5.2. Resultados de medidas de desempeño de modelos [2/3]

	%Hit		Proporción de fallas de Kupiec		Cuantil dinámico		Análisis de regresión		Prueba VQR		Función de Pérdida Linex	
	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %
APARCH	0,0	0,1	0,00	0,00	1	0,79	1	1	P	P	0,002	0,007
GARCH Indirecto	1,2	5,3	0,84	0,88	1	1,00	1	1	P	P	0,014	0,008
Fama y French	1,0	5,0	0,84	0,88	1	0,70	1	1	P	P	0,015	0,011
APT	0,9	4,7	0,9	0,77	1	0,00	1	1	P	P	0,013	0,014
CAPM	1,1	4,8	0,61	0,89	1	1,00	1	1	P	P	0,014	0,020

Tabla: Medidas de desempeño dentro del período de estimación. Fuente: Cálculos propios

5.2. Resultados de medidas de desempeño de modelos [3/3]

	%Hit		Proporción de fallas de Kupiec		Cuantil dinámico		Análisis de regresión		Prueba VQR		Función de Pérdida Linex	
	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %
APARCH	0,0	0,0	0,28	0,00	1	0,75	1	1	P	P	0,014	0,035
GARCH Indirecto	1,2	7,2	0,38	0,08	1	0,99	1	1	P	P	0,000	0,019
Fama y French	1,2	6,0	0,38	0,33	1	1,00	1	1	P	P	0,001	0.019
APT	1,2	4,8	0,38	0,89	1	0,00	1	1	P	P	0,000	0,013
CAPM	1,2	5,2	0,38	0,67	1	1,00	1	1	P	P	0,002	0,013

Tabla: Medidas de desempeño fuera del período de estimación. Fuente: Cálculos propios

Conclusiones

Esta investigación tuvo como propósito evaluar algunos requerimientos regulatorios propuestos por Basilea II y III, y la Superintendencia Financiera de Colombia para la medición del riesgo de mercado que se halla inscrita en la Circular 057 de 2007. Se encontraron tres problemas referentes a

- Factores de riesgo.
- Metodologías.
- Medidas de desempeño.